УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.32838/2663-5941/2019.4-1/09

***Дубко В.А.***
Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского

# О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Використання понять інваріант, інваріантність у тій чи іншій термінології присутній у багатьох науках. З поняттям інваріантності пов'язані ознаки того, що існують певні загальні показники конкретних категоріальних відносин (або значень), які повинні бути. Поняття інваріанта відбиває загальні властивості класів досліджуваних об'єктів.*

*Як бачимо, теорія (та методи) визначення інваріантів відіграють фундаментальну роль у математичних, природничих та технічних науках. Вона формує алгоритми визначення властивостей, характеристик та параметрів досліджуваних об'єктів, які залишаються незмінними при різних перетвореннях цих об'єктів, зовнішніх впливах.*

*У сучасній літературі зростає інтерес до проблеми побудови та аналізу моделей, що включають нелінійні детерміновані й стохастичні компоненти процесів. Існує два основних підходи в різних областях досліджень, пов'язаних із випадковими збуреннями в динамічних системах. Перший підхід виконує аналіз випадкових динамічних систем, здійснюючи пряме стохастичне узагальнення основних понять, що виникають у теорії динамічних систем, таких як випадкові атрактори та випадкові інваріантні многовиди. Другий підхід, якому ми будемо слідувати у цій статті, належить до побудови класу моделей, для яких існує можливість збереження певного функціонального многовиду.*

*Інваріантні многовиди важливі для теорії динамічних систем, оскільки поведінка будь-якої динамічної системи відноситься до базової геометричної структури простору станів, зокрема, до організації інваріантних стійких і нестійких підпросторів.*

*В теорії управління на основі ідеї інваріантності виділяється клас моделей, властивості, показники яких не змінюються при певних змінах у системі, схемі зв'язку елементів. Теорія дозволяє нам визначити допустимі збурення реальної системи, які не впливають на її основні показники. Як модель таких показників може бути набір деяких математичних функцій.*

*Зазначимо, що пошук інваріантних перетворень узгоджується з проблемою автоморфізму.*

*У цій статті ми доводимо, що, застосовуючи запропонований нами алгоритм, для будь-якої диференційованої функції, ми можемо побудувати набір перетворень, для яких ця функція буде інваріантом. Як приклад застосування отриманих результатів ми розглянули приклад визначення класу рівнянь Іто з пуассонівськими збуреннями, для вибраних детермінованих перших інтегралів.*

*Зазначимо ще раз, що вимога забезпечення стабільності певних системних показників є одним із завдань управління. Факт існування перших інтегралів для рівнянь Іто можна розглядати як основу для вибору управлінь динамічною системою, що дозволяє з імовірністю 1 підтримувати необхідні параметри при сильних збуреннях.*

*Зазначимо, що ми використовуємо визначення першого інтеграла системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто (Дубко В.О., 1978) і спираємося на дослідження, виконані нами у 2003 році.*

***Ключові слова:*** *інваріант, інваріантність, перші інтеграли, рівняння Іто, алгоритм.*

**Постановка проблемы.** Использование понятий инварианта, инвариантности в той или иной терминологии присутствуют во многих науках. С представлением об инвариантности, связаны признаки, которыми должны обладать некие общие показатели того или иного категориального отношения (или значения): в понятии инварианта отображаются общие свойства классов исследуемых объектов.

Примерами инвариантов могут служить различные законы сохранения в физике, химии и других науках, фундаментальные физические константы.

Выявление областей устойчивость системы по отношению к отклонениям: условия глобальной и локальной инвариантности – является и предварительным этапом при переходе к изучению динамики любой системы. Такая информация позволяет оптимизировать управления: не предпринимать никаких дополнительных действий, пока система находиться области такой устойчивости.

В теории управления, на основе представления об инвариантности, выделяются класс моделей, свойства, показатели которых не изменяются при определенных изменениях системы, схемы соединения элементов.

Как видим, теория и методы определения инвариантов играют фундаментальную роль в математических, технических и естественных науках. Она формирует алгоритмы определения свойств, характеристик и параметров исследуемых объектов, которые остаются неизменными при различных преобразованиях этих объектов, внешних воздействиях. Отметим, что интерес к исследованию этой проблемы, применительно к вопросам теории автоматического управления, усилился после работ Щипанова Г.В. (1948 г.) [1]. Состояние теории, связанной с представлением об абсолютной инвариантности Щипанова, можно найти, например, в [2].

**Изложение основного материала исследования.** Инвариант преобразования $g$ - это свойство, величина, не изменяющиеся при преобразовании $g$. Понятие инварианта позволяет классифицировать множество, объектов, на основе свойства инвариантности их определяющих показателей, по отношению к заданному преобразованию $g$ или классу преобразований $G$, разделяет по этому признаку любые не эквивалентные объекты из рассматриваемой совокупности.

Важным применением теории инвариантов, является и установление класса воздействий на моделируемую систему, не влияющих на ее жизненно важные показатели. В качестве таких показателей может служить набор некоторых функций.

Пусть $g(a)$ отображение элементов множества $A$ во множество $B$: $g(a) \in B$. Если функция $f$, скалярная или векторная, определена на множестве $A$ и выполняется тождество:

$$f(a) = f(g(a)), \tag{1}$$

то $g$ называют инвариантным преобразованием для функции $f$.

<u>К прямой задаче мы отнесем</u> решение вопроса о строение класса $g(a)$, согласованного с условием (1). Как уже отмечалось, с точки зрения теории управления, эта задача связана с решением вопроса о допустимых преобразованиях, не изменяющих определяющий показатель $f$.

Отметим, что поиск инвариантных преобразований согласуется с проблемой автоморфности: поиск дробно-линейных преобразований в области аналитичности функций комплексного переменного, которые не изменяют ее функциональный вид. В области построения автоморфных преобразований, в том числе и для функций многих комплексных переменных, существует большое число работ, и оценить их значимость, не работая постоянно в этой области, сложно. Но поскольку в теории автоматических управлений используются преобразования Лапласа, то это уже указывает на важность выделенного направления [3].

В данной работе, мы продолжим наши исследования, начатые в работе [4], и покажем, что для любой дифференцируемой функции, на основе предложенного в [4] алгоритма, можно построить множество преобразований, для которых эта функция будет инвариантом, но не обязательно по всем переменным, от которых она зависит. Приведем и конкретные задачи-примеры, показывающие, что нахождение таких преобразований является необходимым.

***Алгоритм построения.*** Отождествим множества $A$ и множество $B$ с точкам в $(n+m)$- мерном евклидовом пространстве и рассмотрим произвольную функцию $u(y;x)$, где $x \in R^n, y \in R^m$. Покажем, как на основе $u(y;x)$ определить класс векторных функций $g(y;x;\gamma)$, таких, что

$$u(y;x) = u(y; g(y;x;\lambda)),\ \forall\lambda \in [0,\Lambda), \forall y \in D \subset R^m, \tag{2}$$

Требование (2) эквивалентно равенствам:

$$\frac{\partial u(g(y;x;\lambda))}{\partial\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial u(y;g(y;x;\lambda))}{\partial\lambda} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j(y;x;\lambda)}{\partial\lambda} \cdot \frac{\partial u(y;g(y;x;\lambda))}{\partial g_j(y;x;\lambda)} = 0$$

Это условие ортогональности векторов: $\dfrac{\partial g(y;x;\lambda)}{\partial\lambda}$ и $\nabla_g u(y;g)$

Оно приводит к следующей системе, в векторной форме, уравнений:

$$\frac{dg(y;x;\lambda)}{d\lambda} = f(y;x;\lambda) \times$$
$$\times \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ \frac{\partial u(y;g(y;x;\lambda))}{\partial g_1} & \frac{\partial u(y;g(y;x;\lambda))}{\partial g_2} & \cdots & \frac{\partial u(y;g(y;x;\lambda))}{\partial g_n} \\ f_{3,1}(y;x;\lambda) & f_{3,2}(y;x;\lambda) & \cdots & f_{3,n}(y;x;\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n,1}(y;x;\lambda) & f_{n,2}(y;x;\lambda) & \cdots & f_{n,1}(y;x;\lambda) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $e_j$ – единичные, взаимно ортогональные векторы, а $f(y;x;\lambda)$, $f_{l,j}(y;x;\lambda)$ – произвольные функции, не нарушающие условия существования и единственности решения системы уравнений (3)

где $e_j$ – единичные, взаимно ортогональные векторы, а $f(y;x;\lambda)$, $f_{l,j}(y;x;\lambda)$ – произвольные функции, не нарушающие условия существования и единственности решения системы уравнений (3) $\forall$ фиксированных значений $x, y$.

Решение (3) всегда будем искать при начальном условии:

$$g(y;x;\lambda)\,|_{\lambda=0} = x\,, \qquad (4)$$

Пример. Пусть $x \in R^2$. В этом случае система уравнений (3), приобретает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1(y;x;\lambda)}{\partial \lambda} = f(y;x;\lambda)\dfrac{\partial u(g(y;x;\lambda))}{\partial g_2} \\ \dfrac{\partial g_2(y;x;\lambda)}{\partial \lambda} = -f(y;x;\lambda)\dfrac{\partial u(g(y;x;\lambda))}{\partial g_1} \end{cases}$$

Выберем, например, $u(y,x) = (x,x)$. Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1(y;x;\lambda)}{\partial \lambda} = 2f(y;x;\lambda)g_2(y;x;\lambda) \\ \dfrac{\partial g_2(y;x;\lambda)}{\partial \lambda} = -2f(y;x;\lambda)g_1(y;x;\lambda) \end{cases}$$

Или в матричной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(y;x;\lambda)}{\partial \lambda} = f(y;x;\lambda)Bg(y;x;\lambda), \\ g(y;x;0) = x \end{cases} \qquad (5)$$

Где:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение имеет (5) вид:

$$g(y;x,\lambda) = \exp\{2\int_0^\lambda f(y;x;\theta)d\theta B\}x.$$

Учитывая, что:

$$B^2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -E,$$

приходим к следующему представлению решения (5):

$$g(y;x,\lambda) = -\sin(2\int_0^\lambda f(y;x;\theta)d\theta)Bx + \cos(2\int_0^\lambda f(y;x;\theta)d\theta)Ex$$

Таким образом,

$$g_1(y;x,\lambda) = x_2\sin(2\int_0^\lambda f(y;x;\theta)d\theta) + x_1\cos(2\int_0^\lambda f(y;x;\theta)d\theta),$$

$$g_2(y;x,\lambda) = -x_1\sin(2\int_0^\lambda f(y;x;\theta)d\theta) + x_2\cos(2\int_0^\lambda f(y;x;\theta)d\theta).$$

Например, можем отождествить $x_1 = t,\ x_2 = x$, или положить $y = t$, а $x \in R^2$.

***Построение множества стохастических уравнений, обладающих набором первых интегралов***. Если для открытой динамической системы известен инвариант, то по отношению к системе выступает как системный закон. Предположим, что систему можно смоделировать при помощи стохастических уравнений. В этом случае задача состоит в определении класс уравнений, согласованных с условием существования этого инварианта.

В качестве примера применения предложенного алгоритма, рассмотрим систему уравнений Ито с пуассоновскими возмущениями:

$$\begin{aligned} &dx_i(t) = a_i(t;x(t))dt + \int_{\mathbb{R}(\lambda)} g_i(t;x(t);\lambda)\nu(dt;d\lambda), \\ &x(t) = x(t;x(0))\big|_{t=0} = x(0),\ i = \overline{1,n},\ t \ge 0, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $x(t) \in R^n$ – динамический процесс, $\nu(t;\Delta\lambda)$ – однородная по $t$ случайная мера Пуассона; $\mathbb{R}(\lambda)$ – пространство параметра $\lambda$. Относительно коэффициентов $a_i(x;t)$, и $g_i(t;x;\lambda)$ в уравнении (6), предполагаем, что они обладают достаточной степенью гладкости по совокупности переменных $(x,t,\lambda)$, и подчинены ограничениям, обеспечивающих существование и единственность решения (6) [5, с. 247, 255].

Предположим, что в качестве ограничения для вида системы (6), выступают неслучайные, независимые функции $u_l(x;t), x \in R^n$ – непрерывные вместе со своими первыми производными по компонентам $(x;t)$ и такие, что на любой реализации $x(t;x(0))$ решения уравнения (6)

$$u_l(t;x(t;x(0))) = u_l(0;x(0)),\ l = \overline{1,m},\ m < n\,, \qquad (7)$$

т.е., $u_l(x;t)$ являются неслучайным первым интегралом системы (6) [6; 7].

С учетом (7), воспользовавшись расширенной формулой Ито, приходим к равенству:

$$du_l(t;x(t)) = [\frac{\partial}{\partial t}u_l(t;x(t)) + \sum_{j=1}^n a_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j}u_l(t;x(t))]dt +$$
$$+\int [u_l(t;x(t) + g(t;\gamma)) - u_l(t;x(t))]\,\nu(dt;d\gamma) \equiv 0,\ \forall t \ge 0.$$

Это возможно, если:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_l(t;x(t)) + \sum_{j=1}^n a_j(t;x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_l(t;x(t)) = 0,\ \forall l = \overline{1,m}\,, \qquad (8)$$

$$u(t;x + g(t;x;\gamma)) - u(t;x)] = 0, \forall\gamma.\,, \qquad (9)$$

Рассмотрим равенства (8). Как показано в [6], коэффициенты, обеспечивающие это равенство, можно найти по формуле:

$$e_0 + a(t) = A_0^{-1}(t)\det\begin{pmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_n \\ q_{1,0}(t) & q_{1,1}(t) & \dots & q_{1,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n,0}(t) & q_{n,1}(t) & \dots & q_{n,n}(t) \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где $e_j, j = \overline{0,n}$ – набор ортогональных единичных векторов, $a(t) \in R^n$ – вектор с компонентами $a_j(t) = a_j(t;x)$, $A_0(t) \uparrow 0$ – алгебраическое дополнение к $e_0$; основное требование к функциям:

$$q_{l,0}(t) = \frac{\partial}{\partial t}u_l(t;x)\,,\ q_{l,j}(t) = \frac{\partial}{\partial x_j}u_l(t;x)\,,$$

$(l = \overline{1,m}, m \le n)$, $q_{i,j}(t) = q_{i,j}(t;x),\ (i = \overline{m+1,n})$, $j = \overline{1,n}$ – не нарушения условий существования и единственности решений (6).

Если же $u_l(x;t) = u_l(x)$, то число независимых $u_l(x)$ не может превышать $(n-1)$. С учетом того, что коэффициенты $q_{l,0}(t) \equiv 0$, уравнение для определения компонент вектора $a(t)$ заменяется таким:

$$a(t) = q(t;x)\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ q_{1,1}(t) & q_{1,1}(t) & \dots & q_{1,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n-1,0}(t) & q_{n-1,1}(t) & \dots & q_{n-1,n}(t) \end{pmatrix},$$

где $\qquad q_{l,j}(t) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}u_l(x) \qquad (l = \overline{1,m}, m < n)$,

$q_{i,j}(t) = q_{i,j}(t;x) \quad (i = \overline{m+1, n-1})$, и $j = \overline{1,n}$. Как и в (10), требование к функциям связываем с обеспечением условий существования и единственности решений (6).

Рассмотрим условие (9). Как следует из уравнения (3), для определения вектора $g(t;x;\lambda)$, необходимо решить систему уравнений:

$$\frac{\partial g(t;x;\lambda)}{\partial \lambda} = f(t;x;\lambda)\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ f_{1,1}(t;\lambda) & f_{1,2}(t;\lambda) & \cdots & f_{1,n}(t;\lambda) \\ f_{2,1}(t;\lambda) & f_{2,2}(t;\lambda) & \cdots & f_{2,n}(t;\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1,1}(t;\lambda) & f_{n-2,2}(t;\lambda) & \cdots & f_{n-1,n}(t;\lambda) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где, как и прежде, основное требование к функциям:

$$f(t;x;\lambda),\ f_{l,j}(t;\lambda) = \frac{\partial}{\partial g_j} u_l(t;g)\ (l = \overline{1,m}, m < n),$$

$$f_{i,j}(t;\lambda) = f_{i,j}(t;x;\lambda)\ (i = \overline{m+1, n-1}) \ -$$

не нарушения условий существования и единственности решений системы уравнений (10).

Пример. Пусть $x \in R^2$,

$u(x;t) = (x_1 + x_2)^2 + c^2t^2 + b;\ c, b - const \neq 0.$

Поскольку пример демонстрационный и связан с применением уравнения (3) в представлении (11), чтобы не усложнять изложение дополнительными выкладками и ограничениями, положим в (6) вектор $a(t) \equiv 0.$

Из (11) следует, что:

$$\frac{dg(t;x;\lambda)}{d\lambda} = $$
$$= f(t;x;\lambda)\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ 2(g_1(t;x;\lambda) + g_2(t;x;\lambda)), & 2(g_1(t;x;\lambda) + g_2(t;x;\lambda)) \end{pmatrix}$$

или

$$\frac{dg(t;x;\lambda)}{d\lambda} = 2f(t;x;\lambda)Dg(t;x;\lambda);\quad g(t;x;0) = x,$$

где $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Решение подадим в векторно-матричной форме:

$$g(t;x;\lambda) = \exp\{2\int_0^\lambda f(t;x;\theta)d\theta D\}x, \quad (12)$$

Учитывая, что:

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

от (12) переходим к представлению:

$$g(t;x;\lambda) = (E + 2D\int_0^\lambda f(t;x;\theta)d\theta)x$$

где $E$ – единичная матрица.

Покомпонентная запись решения имеет вид:

$$g_1(t;x;\lambda) = x_1 + 2\int_0^\lambda f(t;x;\theta)d\theta(x_1 + x_2),$$

$$g_2(t;x;\lambda) = x_2 - 2\int_0^\lambda f(t;x;\theta)d\theta(x_1 + x_2).$$

Убедится в правильности найденного решения, можно путем замены $x$ на $g(t;x;\lambda)$ в $u(x;t) = (x_1 + x_2)^2 + c^2t^2 + b.$

**Выводы.** Таким образом, первоначальная идея о построении континуума преобразований для произвольной функции, была отображена в работе [4]. Основным стимулом поиска таких преобразований, стала необходимость исследования вопроса о возможности существовании детерминированных первых интегралов для стохастических систем при наличии не только винеровских, но и скачкообразных возмущений, исследование диффузии в среде с резко изменяющимися параметрами. Предложенный алгоритм построения, для любой заданной функции, преобразований, оставляющих неизменный вид этой функции, сделал реальным переход к построению программных управлений на динамических многообразиях, для систем с пуассоновскими и винеровскими возмущениями (см., например, [11] и ссылки в ней). В данной работе, исследуется более общий вопрос, когда для функции, характеризующей состояние системы, инвариантность допускается, но не по всем переменным, входящих в эту функцию.

**Список литературы:**


1. Щипанов Г.В. Теория и методы построения автоматических регуляторов. *Автоматика и телемеханика*. 1939. № 1. С. 4–37.
2. Труды Научного семинара «70 лет теории инвариантности», монография / Васильев С. (ред.). Москва, 2008. 256 с.
3. Сильвестров В.В. Автоморфные функции – обобщение периодических функций. *Соровский образовательный журнал*. Т.6 , № 3 .2000. С. 124–127.
4. Дубко В.А. Проблема инвариантности и алгоритм построения множества автоморфных преобразований для заданной функции. *Друга міжнар. наук.-практ. Конф. «Відкриті еволюціонуючі системи»* (Київ.1–30 грудня 2003 р.). Т. 2. Київ : ВНЗ ВМУРоЛ, 2004. С. 66–68.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев : Наук. Думка, 1968. 268 с.
6. Дубко В.А. Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений : препр. Киев : АН УССР. Ин-т математики, 1978. 24 с.
7. Дубко В.А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток : ДВО АН СССР, 1989. 185 с.
8. Карачанская Е.В. Построение множества дифференциальных уравнений с заданным множеством первых интегралов. *Вестн. Тихоокеан. гос. ун-та*. 2011. № 3. С. 47–56.

**Doobko V.A. ON CONSTRUCTION OF A SET OF INVARIANT TRANSFORMATIONS FOR THE FUNCTION OF MANY VARIABLES**

*The use of the concepts of invariant, invariance in one or another terminology is present in many sciences. Associated with the concept of invariance are signs that there are certain general indicators of a specific categorical relationship (or values) that should be. The concept of an invariant displays the general properties of classes of studied objects. As we see, the theory (and methods) for determining invariants play a fundamental role in the mathematical, technical and natural sciences. It forms the algorithms for determining the properties, characteristics and parameters of the objects under study, which remain unchanged under various transformations of these objects, external influences.*

*In modern literature, there is growing interest in the problem of constructing and analyzing models that include non-linear deterministic and stochastic components of processes. There are two main approaches in various fields of research related to random perturbations in dynamical systems. The first approach considers the analysis of random dynamical systems, defining a direct stochastic generalization of the basic concepts that arise in the theory of dynamical systems, such as random attractors and random invariant manifolds. The second approach, in which we will follow this article, relates to the construction of a class of models for which allow existence the preservation of a given functional, variety.*

*Invariant manifolds are important for the theory of dynamical systems, since the behavior of any dynamical system refers to the basic geometric structure of the state space, in particular, to the organization of invariant stable and unstable subspaces.*

*In control theory, on the basis of the idea of invariance, the class of models, properties, indicators of which do not change with certain changes in the system, the connection scheme of elements, are distinguished.*

*The theory allows us to identify the permissible perturbations of the real system that do not affect its basic indicators. As a model of such indicators there may be a set of some mathematical functions.*

*Note that the search for invariant transformations is consistent with the automorphism problem.*

*In this paper, we prove that by applying the algorithm proposed by us, for any differentiable function, we can construct a set of transformations for which this function will be an invariant. As an example of the application of the results obtained, we considered an example of finding a class of Ito equations with Poisson perturbations with selected, deterministic first integrals.*

*We note once again that the requirement of ensuring the stability of certain system indicators is one of the management tasks. The fact of the existence of the first integrals for the Ito equations can be considered as a basis for choosing controls for a dynamic system, which allows, with probability 1, to maintain the required parameters for strong perturbations.*

*Note that we use the definition of the first integral for the system of Ito stochastic differential equations (Doobko V.A., 1978), and based on the research that we have in 2003.*

***Key words:*** *invariant, invariance, first integrals, Ito equation, algorithm.*